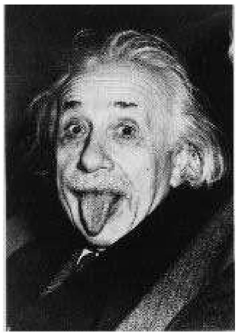

KFT Übungen 05

Klassische Feldtheorie: Noether-Theorem

1. Noether-Strom und Energie-Impuls-Tensor in der Feldtheorie

   Sei $S = S[\Phi_1, \Phi_2]$ die Wirkung für 2 Skalarfelder aus Aufgabe 04.2, allerdings nun mit einem Potential dass nur von der Kombination $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$ abhängt,

   $$S[\Phi_1, \Phi_2] = \int d^4x \, \left[-\tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \Phi^a \partial_\beta \Phi^b \delta_{ab} - V(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \right] \ . \tag{1}$$

   (a) Zeige dass die Wirkung invariant under (infinitesimalen) zwei-dimensionalen Rotationen im Raum der Skalarfelder (Φ_1, Φ_2) ist, bestimme den entsprechenden Noether-Strom, und prüfe explizit nach dass er für Lösungen der Bewegungsgleichungen erhalten ist.

   (b) Die Lagrangefunktion hängt nicht explizit von den Koordinaten ab. Daher gibt es einen erhaltenen Energie-Impulstensor

   $$\Theta^\alpha_{\ \beta} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \Phi_a)}\partial_\beta \Phi_a - \delta^\alpha_\beta L \ . \tag{2}$$

   Berechne diesen und überprüfe explizit dass er für eine Lösung der Bewegungsgleichungen erhalten ist, $\partial_\alpha \Theta^\alpha_{\ \beta} = 0$.

2. Der Maxwell Energie-Impuls-Tensor

   Der kovariante (metrische) Energie-Impuls-Tensor der Maxwell-Theorie ist

   $$T^\alpha_{\ \beta} = -F^{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma} + \tfrac{1}{4}\delta^\alpha_\beta \, F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta} \ . \tag{3}$$

   (wir werden im folgenden $\mu_0 = 1$ setzen). Dieser unterscheidet sich von dem (nicht eichinvarianten und nicht-symmetrischen) kanonischen Energie-Impuls-Tensor der Maxwell-Theorie um einen identisch erhaltenen Term.

   (a) Zeige dass $T^\alpha_{\ \beta}$ spurfrei ist, und dass $T_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma}T^\gamma_{\ \beta}$ symmetrisch ist.

   (b) Drücke $T^0_{\ 0}$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus, und bestimme den Zusammenhang zwischen $T^k_{\ 0}$ und den Komponenten des Poynting-Vektors $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$.

(c) Zeige dass aus den Maxwell-Gleichungen folgt

$$\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0 \quad , \quad \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -J^\beta \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha T^{\alpha\beta} = -J_\alpha F^{\alpha\beta} \quad . \tag{4}$$

[Hinweis: Verifikation dieser Gleichung erfordert tatsächlich beide Sätze von Maxwellgleichungen. Richtig gemacht ist das eine kurze 4 Zeilen Rechnung, schlecht gemacht kann man sich dabei ewig im Kreis drehen - diese Aufgabe ist daher ein exzellenter Test für Euch um zu sehen ob ihr den Formalismus beherrscht.]

Bemerkungen:

1. Dies ist das letzte Übungsblatt für diese Vorlesung.
2. Wichtigste Voraussetzung für ein gutes Abschneiden bei der Prüfung ist Kenntnis und Verständnis aller Übungsaufgaben (denn sooo viele Dinge gibt es ja nicht die ich bei einer schriftlichen Prüfung fragen kann ...)
3. "Verständnis" heisst auch, dass Ihr Dinge die richtig gemacht n-Zeilen-"Rechungen" sind auch tatsächlich in maximal n Minuten lösen könnt (und nicht erst lange nachdenken müsst oder zufällig nach einigen Seiten Rechnung zum vielleicht richtigen Ergebnis kommt).