



KFT ÜBUNGEN 04

KLASSISCHE FELDTHEORIE: SKALARFELDER

1. In der Elektrostatik ist die Energiedichte des elektrischen Feldes proportional zu

$$\rho_{\mathcal{E}}(\phi) = \frac{1}{2} \vec{E}^2 = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2, \quad (1)$$

und die elektrostatische Gesamtenergie ist

$$\mathcal{E}[\phi] = \int d^3x \rho_{\mathcal{E}}(\phi). \quad (2)$$

Zeige

$$\mathcal{E} \text{ extremal (minimal)} \Leftrightarrow \phi \text{ erfüllt die Laplace-Gleichung } \Delta \phi = 0. \quad (3)$$

2. Die Wirkung für zwei reelle Skalarfelder $\{\Phi_a\} = \{\Phi_1, \Phi_2\}$ laute

$$S[\Phi_a] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi^a \partial_\beta \Phi^b \delta_{ab} - V(\Phi_1, \Phi_2) \right]. \quad (4)$$

Leite aus dieser Wirkung durch Variation $\Phi_a \rightarrow \Phi_a + \delta \Phi_a$ die Bewegungsgleichungen für Φ_1 und Φ_2 her.

3. Seien $L_1(\phi, \partial_\alpha \phi; x)$ und

$$L_2(\phi, \partial_\alpha \phi; x) = L_1(\phi, \partial_\alpha \phi; x) + \frac{d}{dx^\alpha} W^\alpha(\phi; x) \quad (5)$$

zwei Wirkungen für ein reelles Skalarfeld ϕ (die möglicherweise explizit von den Koordinaten x^α abhängen). Hier ist d/dx^α die totale Ableitung

$$\frac{d}{dx^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial \phi(x)} + \dots \quad (6)$$

die sowohl auf die explizite als auch auf die implizite x -Abhängigkeit wirkt.

Zeige dass die Euler-Lagrange Gleichungen für L_1 und L_2 identisch sind, d.h. dass die Euler-Lagrange Gleichungen für eine totale Ableitung dW^α/dx^α identisch erfüllt sind.

4. Die Chern-Simons Wirkung

Sei

$$S_{CS}[A] = \frac{1}{2} \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha F_{\beta\gamma} \quad (7)$$

die (sogenannte Chern-Simons) Wirkung für ein Eichfeld A_α in $3 = 2 + 1$ Dimensionen, also mit $\alpha, \beta, \dots \in \{0, 1, 2\}$, $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ total antisymmetrisch, und $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$.

- (a) Bestimme die Bewegungsgleichung für A_α
- (b) Diskutiere die Eichinvarianz der Chern-Simons Theorie: ist die Bewegungsgleichung eichinvariant? Die Lagrangefunktion? Die Wirkung?
- (c) Betrachte jetzt die Maxwell - Chern-Simons Wirkung mit Lagrange-Funktion

$$L = L_m + k L_{cs} = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} k \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha F_{\beta\gamma} . \quad (8)$$

Zeige dass die entsprechenden Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen lauten:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + k \epsilon^{\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = 0 . \quad (9)$$

[Mehr zu Maxwell - Chern-Simons bei Zeit und Interesse in den Übungen.]