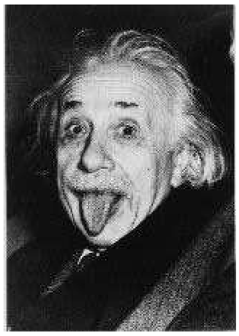

KFT Übungen 03

1. Inhomogene Maxwell-Gleichungen und Potentiale

   Wir führen den 4er-Strom $J_\alpha = (-\rho c, \vec{J})$ und das 4er-Potential $A_\alpha = (-\phi/c, \vec{A})$ ein und definieren den elektromagnetischen Feldstärketensor $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$.

   Die folgende Aufgabe ist im wesentlichen eine Wiederholung von Dingen die wir bereits in der Vorlesung gemacht und besprochen haben. Sinn und Zweck der Übung ist, dass Ihr diese Rechnungen selber nachvollzieht, untere anderem um Euch davon zu überzeugen, um wieviel einfacher und übersichtlicher die kovarianten Rechnungen sind:

   (a) Zeige dass $F_{\alpha\beta}$ eichinvariant ist, d.h. invariant under Eichtransformationen $A_\alpha \to A_\alpha + \partial_\alpha \Psi$. [1-Zeilen-Rechnung]

   (b) Drücke die Komponenten F_{0k} und F_{ik} von $F_{\alpha\beta}$ durch die Komponenten E_i und B_i aus [je 1-2 Zeilen (abhänging von Schriftgrösse ...)] und bestimme daraus die Komponenten von $F^{\alpha\beta}$.

   (c) Zeige dass die 4 Gleichungen

   $$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 J^\beta \tag{1}$$

   die inhomogenen Maxwell-Gleichungen sind.

   (d) Zeige dass (1) sich als

   $$\Box A_\alpha - \partial_\alpha(\partial_\beta A^\beta) = -\mu_0 J_\alpha \tag{2}$$

   schreiben lässt. [1-Zeilen Rechung]

   (e) Zeige dass (2) eichinvariant ist. [1-Zeilen Rechnung]

   (f) Zeige dass aus (1) die Stromerhaltung $\partial_\alpha J^\alpha = 0$ folgt. [1-Zeilen Rechnung]

2. Die Homogenen Maxwell-Gleichungen

   (a) Sei $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Zeige dass

   $$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \equiv 0 \tag{3}$$

   identisch erfüllt ist. [2-Zeilen Rechnung]

(b) Sei jetzt $F_{\alpha\beta}$ der in Aufgabe (1b) berechnete Tensor (Komponenten ausgedrückt durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$). Zeige dass (3) zu den homogenen Maxwell-Gleichungen äquivalent ist.
[Hinweis: betrachte separat die Fälle wo (i) zwei der Indizes in (3) gleich sind, (ii) alle 3 Indizes räumliche Indizes sind, (iii) zwei der Indizes räumlich sind.]

3. Der duale Feldstärketensor: der duale Feldstärketensor ist durch

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta} \tag{4}$$

($\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ total antisymmetrisch, $\epsilon^{0123} = -1$) definiert, so dass (s. Bemerkungen im Anhang)

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \ . \tag{5}$$

Zeige nun alternativ dazu direkt, dass $\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0$ die homogenenen Maxwell-Gleichungen sind, d.h. bestimme (mit $F_{0i} = -E_i/c$, $F_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k$), die Komponenten von $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ und zeige dass

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \ . \tag{6}$$

4. Lorentz-Invarianten

(a) Berechne die Invarianten (eichinvariante Lorentz-Skalare) $I_1 = \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ und $I_2 = \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}$ und schliesse daraus dass wenn in einem Inertialsystem $\vec{E} = 0$ dass dann in jedem Inertialsystem gilt $\vec{E}.\vec{B} = 0$ und $|\vec{E}| < |\vec{B}|$.

(b) Zeige dass I_2 eine totale Ableitung ist wenn $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, d.h. dass es dann einen Vektor C^α gibt so dass $I_2 = \partial_\alpha C^\alpha$. Ist C^α eichinvariant?

Bemerkung: Die potentielle kubische Invariante $I_3 = F^{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F^{\gamma}_{\ \alpha} = 0$ (folgt allein aus der Antisymmetrie von $F_{\alpha\beta}$), und die quartische Invariante $I_4 = F^{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F^{\gamma\delta}F_{\delta\alpha}$ ist eine Linearkombination von $(I_1)^2$ und $(I_2)^2$. Beweise dieser Behauptungen als optionale Zusatzaufgabe.

5. Lorentztransformationen von $\vec{B}$: Bestimme aus

$$\bar{F}_{\alpha\beta} = \Lambda_\alpha^{\ \gamma}\Lambda_\beta^{\ \delta}F_{\gamma\delta} \tag{7}$$

das Transformationsverhalten der Komponenten B_i des magnetischen Feldes unter der Lorentztransformation

$$\left(L^\alpha_{\ \beta}\right) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha & 0 & 0 \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$