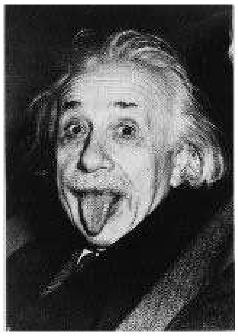

KFT Übungen 01

1. Die Lorentz-Gruppe

   Lorentz-Transformationen sind die linearen Transformationen $\bar{x}^\alpha = L^\alpha_{\ \beta}\, x^\beta$ die das Minkowski Abstandsquadrat invariant lassen:

   $$\eta_{\alpha\beta}\bar{x}^\alpha\bar{x}^\beta = \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{\alpha\beta}L^\alpha_{\ \gamma}L^\beta_{\ \delta} = \eta_{\gamma\delta} \quad \Leftrightarrow \quad L^T\eta L = \eta \tag{1}$$

   (a) Zeige dass aus dieser Definition folgt

   $$\begin{aligned} L^T\eta L = \eta \qquad &\Rightarrow \quad \det(L) = \pm 1 \\ (L^T\eta L)_{00} = \eta_{00} \qquad &\Rightarrow \quad |L^0_{\ 0}| \geq 1 \end{aligned} \tag{2}$$

   (b) Zeige dass die Lorentz-Transformationen

   $$\mathcal{L} = \{L : L^T\eta L = \eta\} \tag{3}$$

   eine Gruppe unter Matrix-Multiplikation bilden, d.h.

   $$\begin{aligned} &L_1, L_2 \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad L_1L_2 \in \mathcal{L} \\ &L \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \exists L^{-1} \in \mathcal{L} : \quad LL^{-1} = L^{-1}L = \mathbb{I} \end{aligned} \tag{4}$$

   (die anderen Bedingungen für eine Gruppe, Assoziativität und $\mathbb{I} \in \mathcal{L}$ sind trivial erfüllt).

   Bemerkung: Die Transformationen mit $\det L = +1$ und $L^0_{\ 0} \geq 1$ bilden eine zusammenhängende Untergruppe der Lorentz-Gruppe, bestehend aus Rotationen und boosts (Geschwindigkeitstransformationen, hyperbolische Rotationen), aber ohne Zeit- oder Raum-Spiegelungen. Diese Untergruppe (technisch die Gruppe der eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen) wird oft einfach nur als *die Lorentz-Gruppe* bezeichnet, und bis auf weiteres folgen wir der Terminologie.

2. Geometrie: Analytische Minkowski-Geometrie

   (a) Zeige dass sich jeder zeitartige Vektor v, $v^2 \equiv v.v = \eta_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta < 0$, als Summe von 2 lichtartigen Vektoren, $v = w_1 + w_2$, $(w_1)^2 = (w_2)^2 = 0$, schreiben laesst (Einstein-Synchronisation).

(b) Sei v ein lichtartiger Vektor, und w η-orthogonal zu v, $v^2 = v.w = 0$. Zeige dass w nicht zeitartig ist, $w^2 \geq 0$, und dass w parallel zu v (d.h. ein Vielfaches von v) ist wenn $w^2 = 0$.

Bemerkung: Die obigen Behauptungen sind Lorentz-invariant. Wenn man sie daher in einem (geeignet gewählten) Inertialsystem zeigt, gelten sie dann automatisch in jedem Inertialsystem. Für (a) ist ein geeignetes Inertialsystem zum Beispiel jenes in dem der Vektor v die besonders einfache Form $v = (a, 0, 0, 0)$ annimmt. Für (b): es ist offensichtlich immer möglich, dass Inertialsystem (durch räumliche Rotation) so zu wählen dass der lichtartige Vektor v Lichtausbreitung in der x-Richtung beschreibt, d.h. $v = (a, \pm a, 0, 0)$ (und notfalls durch eine räumliche Spiegelung lässt sich $v = (a, a, 0, 0)$ erreichen). Dies ist ausreichend, um in einfacher Weise die Behauptung (b) zu beweisen.

Aufgabe (a) zeigt, dass im Allgemeinen die Summe von zwei lichtartigen Vektoren nicht lichtartig ist (der Lichtkegel ist ein Kegel und kein Vektorraum ...). Wie sieht es mit der Summe zweier raumartiger oder zeitartiger Vektoren aus?

(c) Ist die Summe $u^\alpha + v^\alpha$ von zwei raumartigen (zeitartigen) 4er-Vektoren u^α und v^α (mit $u^\alpha + v^\alpha \neq (0, 0, 0, 0)$) immer raumartig (zeitartig)?

3. Tensor-Algebra: Lorentz-Tensoren

(a) Sei u_α ein Lorentz-Kovektor und $T^{\alpha\beta}$ ein zweifach kontravarianter Tensor($(2,0)$-Tensor). Zeige dass $T^{\alpha\beta}u_\beta$ ein Lorentz-Vektor ist.

(b) Sei T^α_β ein Lorentz-(1,1)-Tensor. Zeige dass seine Spur T^α_α ein Lorentz-Skalar ist.

4. Tensor-Analysis: Lorentz-Tensoren und ihre Ableitungen

Sei $f = f(x)$ ein Lorentz-Skalar, $V^\alpha = V^\alpha(x)$ ein 4er-Vektor (Lorentz-Vektor, (1,0)-Tensor), $V_\alpha = \eta_{\alpha\beta}V^\beta$ der zugehörige Kovektor, und $\partial_\alpha = \partial_{x^\alpha}$ die partielle Ableitung. Wie transformieren sich (d.h. von welchem Tensortyp sind)

$$\begin{array}{llllllll} \text{(a)} & \partial_\alpha f & \text{(b)} & V^\alpha \partial_\alpha f & \text{(c)} & V^\alpha \partial_\beta f & \text{(d)} & \partial_\alpha V^\alpha \\ \text{(e)} & f\partial_\alpha V^\alpha & \text{(f)} & \partial_\alpha V_\beta & \text{(g)} & \partial_\alpha \partial_\beta f & \text{(h)} & V^\alpha \partial_\beta V_\alpha \end{array} \tag{5}$$